MATHEMATIQ

Der Newsletter der MathSIG
(Interessensgruppe innerhalb der Mensa Österreich)

Ausgabe 16

http://www.hugi.scene.org/adok/mensa/mathsig/

Editorial

Liebe Leserinnen und Leser!

Dies ist die sechzehnte Ausgabe von MATHEMATIQ, dem Newsletter der MathSIG. Die MathSIG wurde gegründet, um die spezifischen Interessen mathematisch hochbegabter Menschen zu fördern. In erster Linie soll sie sich also den Themengebieten Mathematik, Informatik, Physik und Philosophie widmen. Beiträge von Lesern sind herzlich willkommen. Wenn in ihnen mathematische Sonderzeichen vorkommen, bitte ich aber, sie zwecks möglichst einfacher und fehlerfreier Formatierung im TEX-Format einzusenden. Als Vorlage ist eine Fassung des jeweils aktuellen Newsletters im TEX-Format auf Anfrage bei mir erhältlich. Außer Artikeln sind natürlich auch Illustrationen für das Titelblatt willkommen. Die Rechte an diesen müssen aber eindeutig bei euch selbst liegen, Kopieren von Bildern aus dem Internet ist nicht erlaubt.

Hinweis: Autoren sind für den Inhalt ihrer Artikel oder Werke selbst verantwortlich. Die in MATHEMATIQ veröffentlichten Beiträge widerspiegeln ausschließlich die Meinung ihrer Autoren und nicht jene des Vereins Mensa. Die Zusendung von Beiträgen gilt auch als Einverständnis zu deren Veröffentlichung in MATHEMATIQ.

Diese Ausgabe befasst sich wieder mit Snarks.

In diesem Sinne: Viel Spaß beim Lesen und Lernen!

Claus D. Volko, cdvolko@gmail.com

Snarks, Teil 2

Die Definition von Snarks, die ich in der vorigen Ausgabe brachte, ist zwar gängig, allerdings handelt es sich nicht um jene Definition, die dem Satz "Es gibt keine planaren Snarks" zu Grunde liegt. Denn dieser Satz gilt sicher nicht, wenn man Snarks lediglich als zusammenhängende, kubische Graphen ohne Brücken definiert, die mit vier Farben färbbar sind. Der Grund: Der K_4, also der Graph, der aus vier Knoten besteht, von denen jeder mit jedem anderen Knoten durch eine Kante verbunden ist, wäre nach dieser Definition ebenfalls ein Snark. Er ist aber planar. Also gilt bei dieser Definition der Satz "Es gibt keine planaren Snarks" nicht. Allerdings habe ich nun gelesen, dass normalerweise noch eine zusätzliche Bedingung gilt, wann ein Graph ein Snark ist. Nämlich, dass Snarks einen Kreis von der Länge fünf oder höher enthalten müssen. Damit wäre der K_4 natürlich kein Snark mehr, denn dieser enthält ja überhaupt nur vier Knoten.

Im Folgenden werde ich mir überlegen, ob es mir gelingt zu beweisen, dass der Satz "Es gibt keine planaren Snarks" mit dem Vier-Farben-Satz äquivalent ist.

Aufgrund der Definition von Snarks haben diese folgende Eigenschaften: Z (zusammenhängend), K (kubisch), B (brückenlos), N (benötigt mindestens vier Farben), L (einen Kreis der Länge fünf oder höher enthaltend). Wenn wir mit S bezeichnen wollen, dass ein Graph ein Snark ist, dann gilt:

$\forall x S(x) \leftrightarrow Z(x) \land K(x) \land B(x) \land V(x) \land L(x).$

Nun gilt, dass jeder Graph, der ein Snark ist, nicht planar ist. Kodieren wir Planarität mit dem Symbol P. Es gilt also:

$\forall x S(x) \rightarrow \neg P(x).$

Also:

$\forall x Z(x) \land K(x) \land B(x) \land N(x) \land L(x) \rightarrow \neg P(x).$

Dies ist gleichbedeutend mit:

$\forall x P(x) \rightarrow \neg (Z(x) \land K(x) \land B(x) \land N(x) \land L(x)),$

also

$\forall x P(x) \rightarrow \neg Z(x) \lor \neg K(x) \lor \neg B(x) \lor \neg N(x) \lor \neg L(x).$

Der Vier-Farben-Satz wiederum lautet schlicht und ergreifend (V bedeute, dass ein Graph mit höchstens vier Farben gefärbt werden kann):

$\forall x P(x) \rightarrow V(x).$

Man sieht also, dass $P(x)$ sowohl das eine als auch das andere impliziert. Die Äquivalenz der beiden Sätze ließe sich zeigen, wenn man beweisen könnte, dass aus der einen Konklusion die jeweils andere folgt.

Beginnen wir damit zu beweisen, dass aus $V(x)$ die andere Konklusion folgt. Wenn $V(x)$, dann ist der Graph entweder mit höchstens drei oder mit genau vier Farben färbbar. Wenn höchstens drei Farben genügen, dann ist $\neg N(x)$ erfüllt (der Graph benötigt keineswegs mindestens vier Farben). Wenn aber die Färbung des Graphen des Graphen vier Farben erfordert, dann muss er eine der übrigen Eigenschaften erfüllen: $\neg Z$, $\neg K$, $\neg B$ oder $\neg L$.

Daraus, dass genau vier Farben benötigt werden, lässt sich nicht $\neg Z$ schließen; der Graph kann ja zusammenhängend sein. Der Schluss auf $\neg L$ ist ebenfalls unzulässig, denn es gibt Graphen, die vier Farben erfordern und einen Ring der Größe fünf oder höher enthalten. Wenn man diese Überlegungen fortsetzt, wird man darauf kommen, dass eigentlich keine der vier Eigenschaften erfüllt sein muss. Aber: Es könnte sein, dass jeder Graph, der genau vier Farben erfordert, entweder kubisch ist oder, wenn er nicht kubisch ist, Brücken enthält. Wenn dem wirklich so ist, dann ist das Snark-Theorem tatsächlich eine Schlussfolgerung aus dem Vier-Farben-Satz.

Umgekehrt ist klar, dass zum Beispiel aus $\neg Z(x)$ allein nicht $V(x)$ folgt. Es kann ja ein Graph auch nicht-zusammenhängend sein und dennoch mehr als vier Farben benötigen. Wir müssen aber berücksichtigen, dass der Graph ja auch die Eigenschaft P erfüllt. Beginnen wir bei den leichteren Fällen: Wenn $P(x) \wedge \neg K(x)$, dann ist klar, dass $V(x)$, denn ein nicht-kubischer Graph, der keine Knoten enthält, die mindestens drei Nachbarknoten haben, wird sicher nie mehr als vier Farben benötigen. So müsste man den Rest durchanalysieren. Ich finde allerdings, dass sich diese Analyse sehr schwierig gestaltet. Man bedenke zum Beispiel: Wenn $P(x) \wedge \neg Z(x)$, dann heißt das nur, dass es sich um einen nicht-zusammenhängenden, planaren Graphen handelt. Da dies keine Aussage über die Beschaffenheit der einzelnen Komponenten beinhaltet, bedeutet dies praktisch $P(x) \wedge \neg Z(x) \rightarrow V(x) \leftrightarrow P(x) \rightarrow V(x)$. Aus $P(x) \wedge \neg Z(x)$ können wir also nur dann schließen, dass $V(x)$, wenn wir eh schon wissen, dass $P(x) \rightarrow V(x)$ - was wir aber herleiten wollen! Es könnte aber auch sein, dass es Beziehungen zwischen den fünf Eigenschaften der Snarks gibt, so dass etwa aus $P(x) \wedge \neg Z(x)$ auch andere Eigenschaften des Graphen folgen - und dann das Ganze logisch wird. Wir haben ja auch im ersten Teil des Beweises von solchen Interdependenzen Gebrauch gemacht.

Ich lade jeden herzlich ein, gemeinsam mit mir weiter zu knobeln - aber vielleicht findet sich ja irgendwo auch der Original-Beweis der Äquivalenz der beiden Theoreme.

Claus D. Volko, cdvolko@gmail.com